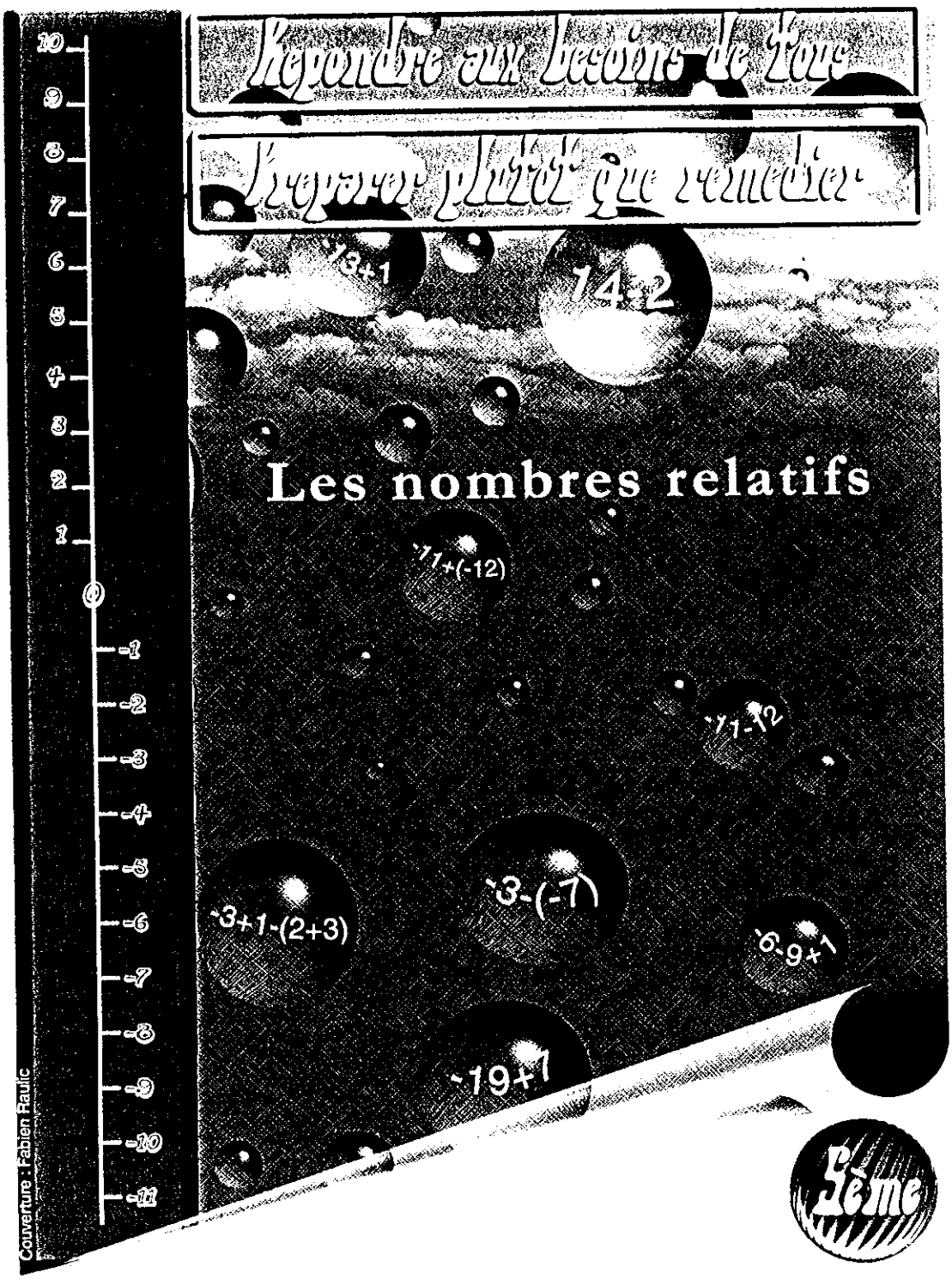
LES NOMBRES RELATIFS



Du point de vue mathématique, les relatifs recouvrent deux idées : d'une part ils permettent de se repérer sur une droite dès que l'on choisit une origine ; d'autre part ce sont des nombres qui donnent du sens à des opérations comme 3 – 8, et donc la possibilité d'effectuer des soustractions dans tous les cas. Ces deux idées sont si différentes que les exemples choisis pour les illustrer auprès des élèves sont distincts :

- pour le repérage sur une droite, les températures, les dates, les étages seront des exemples types, mais ces exemples ne peuvent pas contribuer à donner du sens à l'addition ou à la soustraction ;

- pour aborder ces opérations, le thème choisi sera, le plus souvent, « gains et pertes » ; mais cette fois, dès qu'il y a plus de deux nombres à manipuler, la représentation sur une droite n'est guère efficace.

L'organisation actuelle des programmes est de ce point de vue favorable. Dans un premier temps, en sixième, c'est l'aspect repérage qui est l'objet de l'apprentissage. Pour éviter des confusions ultérieures, il est sans doute préférable de ne pas parler de nombres relatifs à cette occasion : l'introduction de nombres comme – 4 ne le demande pas. Dans un deuxième temps, au début de la cinquième, on aborde l'addition et la soustraction des nombres relatifs. Notre hypothèse est que, pour cela, on ne peut s'appuyer de manière vraiment utile sur le travail fait en classe de sixième concernant le repérage. Dans un troisième temps, sans doute en fin de cinquième, ou au début de la quatrième, les deux points de vue sont rapprochés à l'occasion d'exercices ; on peut en particulier s'appuyer sur la similitude des notations introduites dans les deux cadres.

La séquence dont nous allons parler correspond à l'introduction, au début de la classe de cinquième, de l'addition et la soustraction des nombres relatifs. Nous avons donc cherché des activités qui permettent d'effectuer ces opérations sans imposer de règle préalable, ni même de notation. Ainsi, l'écriture simplifiée apparaît dès l'introduction des opérations. Les notations habituelles ne sont pas les seules possibles, cependant leur sélection se fera dans l'action, par un débat, et non pas de manière imposée.

Deux difficultés principales :

Quelles sont les difficultés principales rencontrées sur ce sujet par les élèves de cinquième ? L'idée d'introduire les nombres relatifs n'en est pas une ; pas plus que l'addition d'un nombre positif et d'un nombre négatif ayant une valeur absolue plus petite. Les deux principaux obstacles semblent être :

- les élèves rechignent à écrire une opération de la forme 5 – 12. Il s'agit sans doute d'un obstacle didactique, c'est-à-dire créé par l'enseignement antérieur. Cette écriture a en effet été considérée comme impossible et sans signification pendant tout le primaire ;

- l'introduction d'opérations du type $4 - (-12)$ et la mise en évidence que cela fait $4 + 12$ est difficile. On peut penser qu'il s'agit cette fois d'un obstacle épistémologique. Soustraire un nombre négatif n'est jamais réellement nécessaire pour résoudre un problème concret. Ce sont des raisons théoriques qui le justifient : la nécessité d'avoir un ensemble de nombres sur lequel toutes les opérations sont possibles. Il faut donc que, d'une manière ou d'une autre, l'élève comprenne cette nécessité pour qu'il se décide à écrire cette soustraction.

Cette deuxième difficulté est peut-être à l'origine de la préoccupation de beaucoup d'enseignants, le besoin de clarifier dans chaque cas la nature de l'opération associée à telle ou telle situation concrète : est-ce une addition, est-ce une soustraction ? Cependant cela ne nous semble pas pertinent ; par exemple, devant une situation concrète peuvent apparaître les écritures $-5 + 7$ et $7 - 5$; elle sont toutes deux légitimes et correspondent pratiquement à des points de vue semblables. Et pourtant, l'une sera considérée comme une addition et l'autre comme une soustraction. C'est même le constat du fait qu'une soustraction peut se réduire à une addition qui est le principal point d'appui pour surmonter l'obstacle $-(-)$. En fait, la distinction addition-soustraction est essentiellement une préoccupation théorique, et l'objet de la construction des relatifs est justement de la supprimer avec l'introduction de l'idée de somme algébrique.

I - PROGRESSION PEDAGOGIQUE ET ORGANISATION DES SEANCES

Les trois premières séances ne concernent que les élèves en difficulté, et les deux suivantes se font en classe entière. (Chaque séance dure cinquante-cinq minutes). Pendant toutes ces séances, les élèves travaillent en groupes de trois ou quatre.

1ère séance
- Première activité : « La réglette qui calcule » *(30 minutes)*
- Deuxième activité : « La récréation »

2ème séance
- Bilan des deux premières activités (débat) *(30 minutes)*
- Troisième activité : « Karim et Benjamin »

3ème séance
- Corrigé rapide de la troisième activité *(10 minutes)*
- Quatrième activité : « L'argent de poche »

4ème séance
- Cinquième activité : « Vérifions les comptes » *(30 minutes)*
- Sixième activité : « Des calculs à la pelle »

5ème séance
- Corrigé de la sixième activité de a) jusqu'à i) *(25 minutes)*
- Ecriture des règles utilisées à partir du corrigé précédent *(15 minutes)*
- Exercices à définir par le professeur.

II - DESCRIPTION DE LA SEQUENCE POUR LES ELEVES EN DIFFICULTE

Préparatifs

S'appuyant sur la représentation des relatifs sur une droite, bien acceptée par les élèves, nous leur avons proposé l'usage d'une réglette à coulisse dans une situation ludique : un jeu de dé bicolore à douze faces. L'intérêt de la coulisse est d'associer opérations et mouvements.

Ne voulant pas leur imposer de notation particulière, seule la partie fixe de la réglette est graduée avec un zéro central (en l'absence de celui-ci, les élèves ont tendance à placer le zéro à l'extrémité gauche, ce qui engendre des difficultés matérielles insurmontables). Dans le même esprit, nous avons introduit les couleurs bleue et rouge pour caractériser les points gagnants et les points perdants.

Au cours d'une séance préalable, on aura distribué la fiche "Confection d'une réglette à coulisse", montré une réglette réalisée et demandé à chacun d'en fabriquer une à la maison. Une autre formule consiste à en faire soi-même une quinzaine que l'on récupérera à la fin de chaque séance et qui pourront servir pour d'autres classes.

L'analyse suivante porte sur 44 groupes d'élèves en difficulté, dont un constitué uniquement de redoublants, provenant de dix classes.

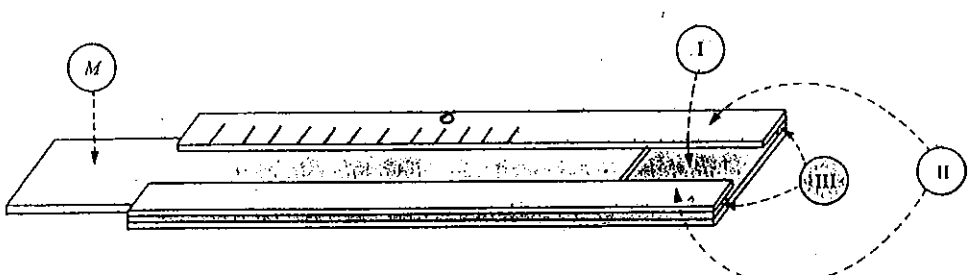
Confection d'une réglette (Bordas – 6è – 1992)

Toutes les dimensions données sont en centimètres.

Découper, dans une feuille de carton épais, un rectangle de 6 × 32 (*I*), un rectangle de 3,8 × 32 (*M*), deux rectangles de 2 x 32 (*II*), quatre rectangles de 1 × 32 (*III*). Réaliser alors la réglette dont un schéma est donné par la figure.

Pour cela coller les rectangles (*III*) sur le rectangle (*I*), en bordure de chaque côté. Coller ensuite les rectangles (*II*) sur les rectangles (*III*) de façon à réaliser un guide dans lequel coulissera le rectangle *M*. La réglette marquée *M* est mobile.

Le rectangle (M) est appelé règle mobile, l'autre partie est appelée règle fixe.



Maintenant, sur la règle fixe, marque un trait tous les centimètres et place le nombre 0 au milieu de la règle fixe.

Première activité : La réglette qui calcule

Objectif : introduction à l'addition des nombres relatifs. (Cette activité peut être abordée par des élèves n'ayant pas encore rencontré les nombres relatifs).

Descriptif : dé à douze faces, rouges (points perdants) ou bleues (points gagnants), et réglette à coulisse. Le choix des nombres respectent trois contraintes :

- commencer par un nombre négatif, c'est-à-dire par une perte, pour déclencher dès les premières opérations une réflexion sur le traitement de ces nombres ;
- choisir des nombres qui, pour toutes les procédures de traitement, soient assez petits pour être représentés sur la réglette ;
- obtenir un résultat final négatif pour que le problème de la comparaison de deux négatifs soit posé.

Déroulement : la mise en route de cette partie de la séquence est celle qui nous semble susciter le plus de difficultés. Plusieurs facteurs interviennent : familiarisation avec la réglette, compréhension du jeu, acclimatation à un mode de travail nouveau. Une fois cette mise en place réalisée, la suite de la séance se déroule très aisément.

Résultats : sur quarante-quatre groupes, trente-deux ont respecté la consigne et utilisé la réglette. Ils ont en général bien associé le zéro central, avec déplacement de l'extrémité de la coulisse (qui reste non graduée). Ils ont ainsi choisi les déplacements qui caractérisent les points gagnants et les points perdants (gauche-droite ou haut-bas). L'emploi de résultats négatifs n'est pas systématique : les réponses sont alors données sous forme de points perdants/gagnants ou rouges/bleus. On remarque toutefois que certains résultats sont donnés sous forme de nombres négatifs, même si les relatifs n'ont pas été employés dans les manipulations. Notons cependant qu'après une bonne manipulation, quelques élèves, pour lire le résultat final sur la réglette, commettent l'erreur de compter en partant de l'extrémité de la règle fixe au lieu de partir du zéro.

Trois groupes (difficulté ou manque de travail) ont eu besoin de plus de temps. Trois autres groupes (dont celui des redoublants, très difficiles à motiver et qui n'ont même pas pensé aux nombres relatifs) n'ont pas réussi cette activité : ce sont les seuls qui n'ont pas su manier la réglette à coulisse. Six groupes ignorent la réglette : certains ajoutent les points perdants puis les points gagnants et calculent la différence ; ils obtiennent en général les bonnes réponses. Les autres calculent pas à pas mais se trompent plus facilement.

Quant aux modes d'emploi écrits par les élèves à propos de l'utilisation de la réglette à coulisse, s'ils manquent de rigueur, ils n'en sont pas moins acceptables. Ils montrent que les élèves en ont compris le fonctionnement. Par exemple : « Quand on perd, on va vers la gauche, et quand on gagne, on va vers la droite ». A noter toutefois qu'un groupe a confondu le mode d'emploi de la réglette et la règle du jeu.

LA REGLETTE QUI CALCULE

A la récréation, Paul et Virginie jouent avec un dé à 12 faces. Certaines faces sont bleues et d'autres sont rouges. Les points marqués sur les faces bleues sont des points gagnants et les points marqués sur les faces rouges sont des points perdants.

Arthur et Chloé qui les regardent jouer, utilisent chacun une réglette à coulisse pour suivre l'évolution du score.

Arthur dit : *« je m'occupe de Paul »* et Chloé lui répond : *« d'accord, je prends Virginie »*.

Paul et Virginie commencent à jouer et jettent chacun une première fois le dé. Paul obtient une face rouge marquée 11 et Virginie une face rouge marquée 12.

Arthur dit : *« c'est Paul qui gagne car il perd moins »*.

Paul et Virginie jettent chacun une deuxième fois le dé. Cette fois Paul obtient une face bleue marquée 8 et Virginie une face bleue marquée 10.

Chloé dit : *« Pour l'instant, c'est Virginie qui gagne car elle a, au total, un point de plus que Paul, ça se voit bien sur les réglettes »*.

Paul et Virginie continuent à jouer et ils jettent en tout chacun dix fois le dé. Les résultats des dix jets sont notés dans les tableaux suivants :

Paul :

couleur	R	B	B	R	R	B	R	R	B	R
point	11	8	6	7	1	5	7	1	10	9

Virginie :

couleur	R	B	B	R	R	B	B	R	B	B
point	12	10	3	7	1	6	2	11	2	3

a) On peut connaître le vainqueur sans faire de calculs en utilisant seulement la réglette à coulisse comme l'ont fait Arthur et Chloé. **Fais comme eux et trouve le vainqueur**.

b) **Rédige maintenant ton propre mode d'emploi de la réglette à coulisse** (tu pourras écrire des nombres sur la règle fixe et sur la coulisse).

LA RECREATION

A la récréation suivante, une nouvelle partie s'organise entre 6 joueurs. Ils lancent chacun 2 fois le dé et obtiennent les résultats suivants :

Daniel :

R	B
11	8

Elodie :

R	B
1	10

Pierre :

B	R
10	7

Julie :

B	R
2	12

Marc :

R	R
7	1

Sophie :

B	B
3	4

1) Trouve le score de chacun, puis établis un classement (tu pourras utiliser la réglette).

2) Peux-tu présenter ces scores sous forme d'opérations ?

Exemples de travaux d'élèves :

Au départ, on met l'extrémité de la coulisse sur le zéro.
Quand on gagne, on va vers la gauche en fonction des points gagné.
Quand on ~~sur~~ tombe sur une face bleu. et on repart de la nouvelle position.
Quand on perd, on va vers la droite en fonction des points perdu.
Quand on tombe sur une face Rouge.
Quand on est à gauche, c'est celui qui a le plus de points qui gagne.
et quand on est à droite c'est celui qui est le plus près de zéro qui gagne.

Paul = - 7 Virginie = - 5

Virginie à gagné

Quand c'est bleu on avance, quand c'est rouge on recule. On avance ou on recule à partir du chiffre qui est marqué sur la face du dé. Au départ, on commence par le 0.

Conclusion : cette activité fonctionne bien quand les élèves ont réussi à associer mouvement de la coulisse et gain ou perte. Il ne faut donc pas laisser un groupe chercher sans succès pendant plus de vingt minutes, et lui donner des conseils dans ce sens en temps utile.

Deuxième activité : La récréation (toujours dans la même séance)

Objectif : addition de deux nombres relatifs.

Descriptif : dé à douze faces numérotées de 1 à 12 ; deux jets et présentation des résultats sous forme d'opérations. Les nombres sont choisis pour que tous les cas d'addition de deux nombres relatifs se présentent.

Déroulement : la réglette à coulisse a souvent été abandonnée après le calcul des résultats des premiers joueurs. Cependant, elle a parfois servi comme moyen de contrôle en cas de désaccord dans le groupe : cela permet de démontrer à un camarade quel est le bon résultat. Les fiches sont ramassées à la fin de la séance (une par groupe) afin de préparer le débat qui suivra.

Résultats : vingt-six groupes ont trouvé les bons scores et les huit autres n'ont fait qu'une ou deux erreurs : $11 - 8 = -3$; $-1 + 10 = -9$; $7 + 1$ au lieu de $-7 - 1$.

Huit groupes n'ont pas eu le temps de terminer cette activité. Le groupe de redoublants n'a pas su faire. Un groupe soustrait systématiquement les nombres en valeur absolue (le plus grand moins le plus petit) et ne donne donc que des scores positifs. Un autre répond en terme de bleu et rouge.

Les groupes ont présenté leurs opérations sous des formes différentes :

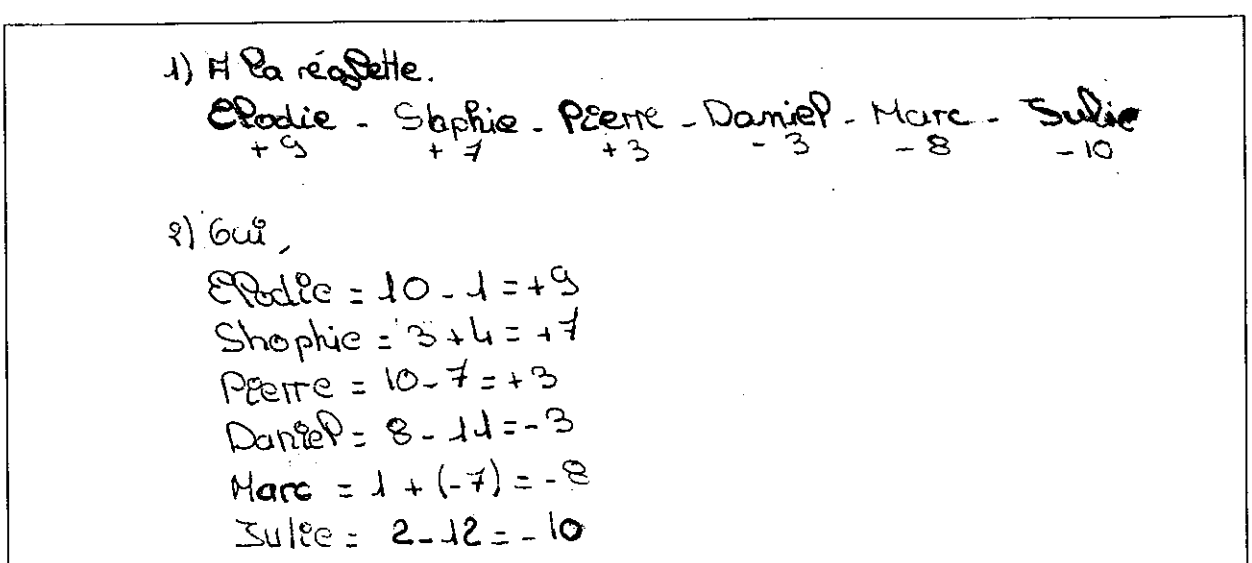
- en ligne avec ou sans parenthèses ;
- en colonne avec ou sans signe d'opération en plus des signes des nombres ;
- avec le signe moins placé parfois après le nombre.

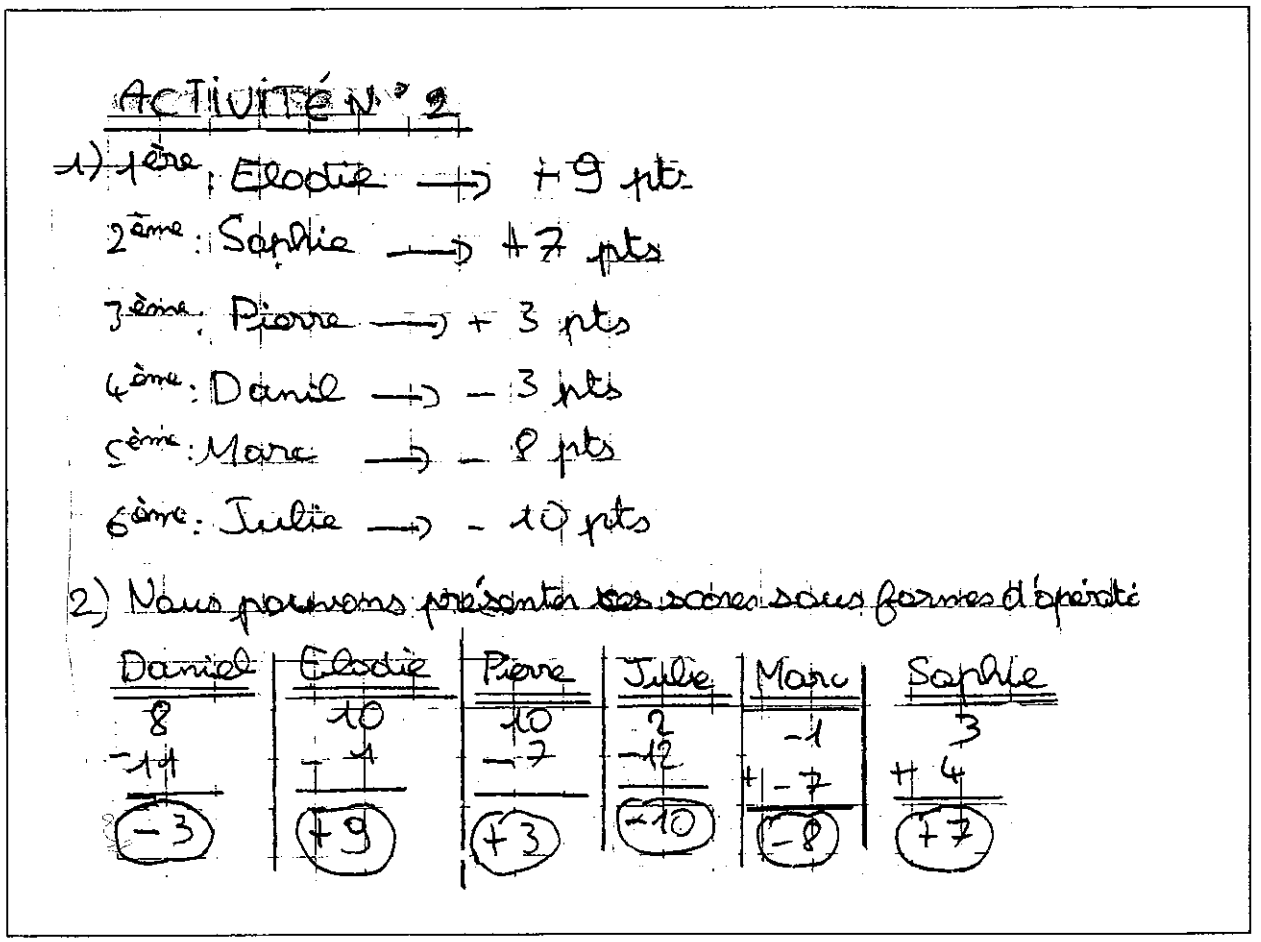
Des écritures fausses accompagnent parfois de bons résultats :

$-7 - -1 = -8$ $\qquad$ $11 - 8 = -3$

ou $\quad -7 + 1 = -8$ $\qquad$ $11 - 8 = 3$ donc -3

Exemples de travaux d'élèves :


1) A la réglette.
Elodie - Shophie - Pierre - Daniel - Marc - Julie
+9 +7 +3 -3 -8 -10
2) Oui,
Elodie = 10 - 1 = +9
Shophie = 3 + 4 = +7
Pierre = 10 - 7 = +3
Daniel = 8 - 11 = -3
Marc = 1 + (-7) = -8
Julie = 2 - 12 = -10


ACTIVITÉ N° 2
1) 1ère : Elodie → + 9 pts
2ème : Sophie → + 7 pts
3ème : Pierre → + 3 pts
4ème : Daniel → - 3 pts
5ème : Marc → - 8 pts
6ème : Julie → - 10 pts
2) Nous pouvons présenter les scores sous forme d'opérati
Daniel 8 -11 -3
Elodie 10 -1 +9
Pierre 10 -7 +3
Julie 2 -12 -10
Marc -1 -7 -8
Sophie 3 +4 +7

Conclusion : on constate que les couleurs sont abandonnées et que les signes arrivent spontanément. L'écriture de certaines opérations déstabilise un peu les élèves ; par exemple *2 – 12* était jusqu'alors considérée comme une opération impossible.

Cette activité est intéressante car elle donne lieu à des écritures différentes. Elle permet aussi des procédures différentes :

- comptage en valeur absolue avant restitution (ou non) du signe ;
- addition des nombres accompagnés de leur signe.

Le débat sur la deuxième activité

Celui-ci se place au début de la deuxième séance. Les différentes opérations produites par les élèves sont rassemblées au tableau ou sur un transparent et servent de base à la discussion. Celle-ci permet quelques mises au point où les bonnes présentations sont finalement acceptées de tous. Toutefois, le débat peut être difficile à amorcer, certains élèves n'étant pas habitués à prendre la parole devant leurs camarades, a fortiori s'ils viennent de classes différentes. Mais il se révèle rapidement fécond : les élèves ont beaucoup de remarques à faire, soit pour valider leurs écritures, soit pour éliminer celles qui leur paraissent trop complexes ou fausses. A ce propos, l'usage de la réglette permet de régler des conflits et de montrer l'équivalence d'écritures différentes (exemple : *–11 + 8 = –3 et 8 – 11* aussi).

Voici le genre d'opérations posées par les élèves :

Ecriture directe des lancés	$-11 + 8 = -3$	$2 - 12 = -10$
Valeur supérieure placée d'abord	$11 - 8 = -3$	$12 - 2 = -10$
Initialisation avec zéro	$(0 - 11) + 8 = -3$	$(0 + 2) - 12 = -10$
Addition exprimée	$-11 + +8 = -3$	$2 + -12 = -10$
Somme de relatifs	$-11 + (+8) = -3$	$2 + (-12) = -10$
Opération en colonnes	$\begin{array}{r} -11 \\ -+8 \\ \hline -03 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \\ -2 \\ \hline -10 \end{array}$

L'écriture « Initialisation avec zéro » a la cote car elle fait référence à la règle à coulisse : *« Il faut bien savoir d'où l'on part, sinon cela pourrait être 1 – 11, ou 5 – 11, ou autre chose »*. Cependant, en rappelant la priorité des opérations, $(0 - 11) + 8$ devient $-11 + 8$.

L'écriture « Valeur supérieure placée d'abord » est tout de suite éliminée, ainsi que l'écriture « Opération en colonnes », puis c'est au tour de l'écriture « Addition exprimée » car inélégante. Sont donc maintenues les écritures « Ecriture directe des lancés » et « Somme de relatifs ».

Finalement, ce débat fonctionne très bien et peut durer assez longtemps (une demi-heure) : veiller à conserver au moins vingt minutes pour l'activité « Karim et Benjamin ».

Troisième activité : Karim et Benjamin (à la suite du débat précédent)

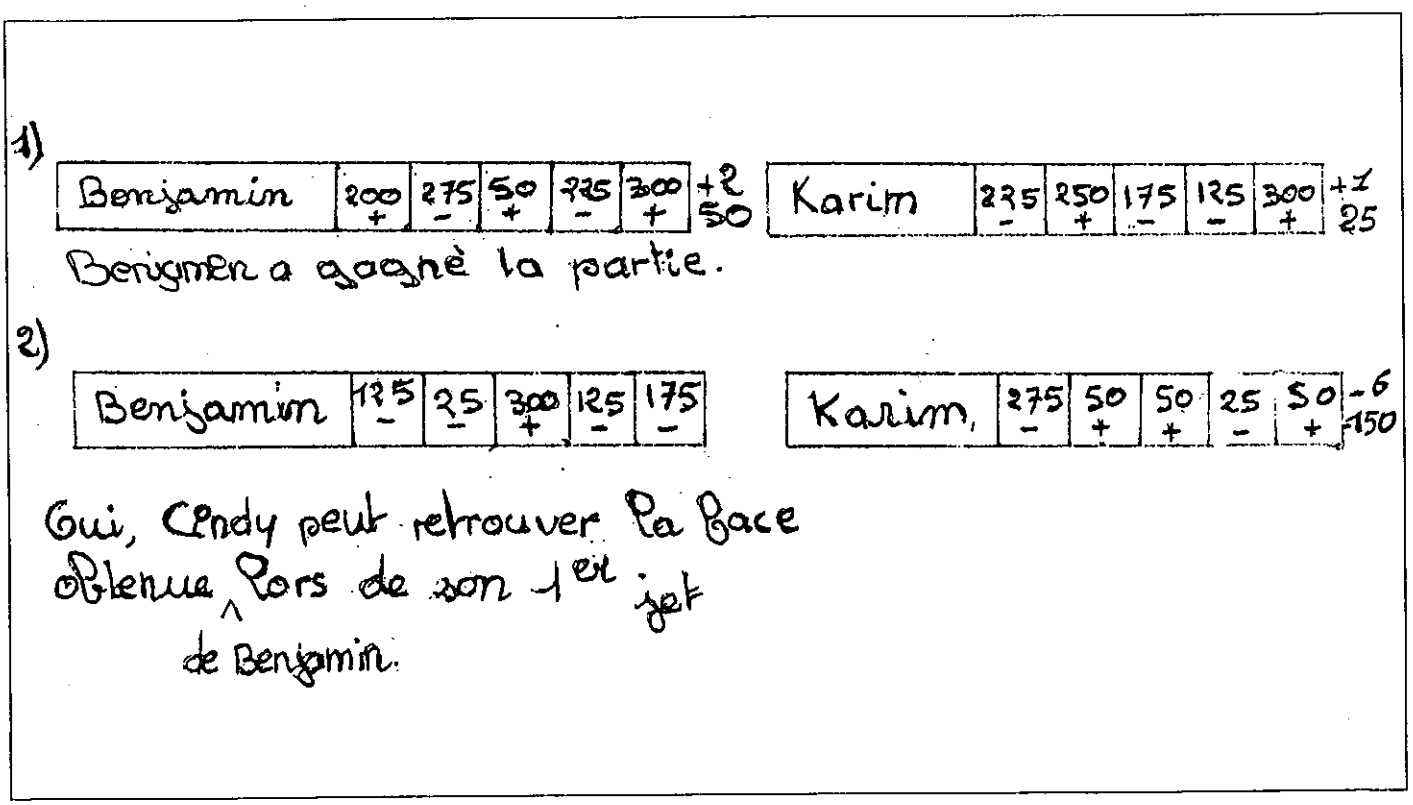
Objectif : somme de grands nombres relatifs.

Descriptif : texte remanié à plusieurs reprises dans un but de clarification et dans l'espoir de voir apparaître la soustraction d'un négatif. Le choix des valeurs beaucoup plus grandes que précédemment a pour but de remplacer l'usage de la réglette par des calculs.

Déroulement : un groupe s'est encore servi de la réglette pour répondre à la première question. Le calcul se fait soit pas à pas, soit en regroupant les points gagnants d'une part et les points perdants de l'autre. Il est à noter que l'on trouve plus d'erreurs avec la première méthode. Là encore, les fiches sont ramassées pour en exploiter les résultats.

Résultats : la première question a été réussie par trente-quatre groupes. A la deuxième question, les scores de Karim et de Benjamin ont été en général bien calculés, mais les signes ne sont pas souvent exprimés. Nombreux sont ceux qui ont écrit 150 – 125 = 25, ou 25 + 125 = 150, ce qui indique qu'ils ont résolu une opération à trou. D'autres ont simplement calculé 150 – 25 = 125. Cela ne les a pas gênés pour annoncer la face 5, alors qu'aucun n'a fait apparaître de scores négatifs. On n'a pas observé de calculs de la forme –150 – (–25) = –125 : donc pas de soustraction de nombres négatifs !

Exemples de travaux d'élèves :


1)
Benjamin 200 + 275 − 50 + 225 − 300 + +2 50
Karim 225 − 250 + 175 − 125 − 300 + +1 25
Benjamin a gagné la partie.
2)
Benjamin 125 − 25 − 300 + 125 − 175 −
Karim 275 − 50 + 50 + 25 − 50 + -6 -150
Oui, Cindy peut retrouver la face obtenue lors de son 1er jet de Benjamin.

Benjamin	8	11	2	9	12	total
	+200	-75	+25	-250	+25	=+50

Karim	9	10	7	5	12	total
	-225	+25	-150	-275	+25	=+25

Donne le score de chaque joueur . Qui a gagné la partie ?

Le gagnant est Benjamin = +50 KARIN = +25.

2) Le soir, à la sortie de l'école, ils jouent une nouvelle partie en 5 jets . Cindy arrive en cours de partie et manque le 1er jet de Benjamin . Elle note les autres jets :

Benjamin	?	1	12	5	7	total
	-125	-25	+275	+150	-25	=-25

Karim	11	2	2	1	2	total
	-275	-225	-175	-200	-150	=-150

A la fin de la partie, Benjamin et Karim s'exclament : « nous sommes ex-aequo »

Cindy peut-elle retrouver quelle face a obtenu Benjamin lors de son 1er jet ?

Benjamin = -25 et KARIME = -150 mais comme ils sont ex-aequo 25+ 125 = -150 pour Benjamin.

125 dans le tableau et = 5 alors le point d'interrogation = 25

Benjamin	8	11	2	9	12
	+200	-275	+50	-225	+300

Karim	9	10	7	5	12
	-225	+250	-175	-125	+300

Donne le score de chaque joueur . Qui a gagné la partie ? Benjamin

Benjamin +50 Karin +25

2) Le soir, à la sortie de l'école, ils jouent une nouvelle partie en 5 jets . Cindy arrive en cours de partie et manque le 1er jet de Benjamin . Elle note les autres jets :

Benjamin	5	1	12	5	7
	-125	-25	+300	-125	-175

Karim	11	2	2	1	2
	-275	+50	+50	-25	+50

150

A la fin de la partie, Benjamin et Karim s'exclament : « nous sommes ex-aequo »

Cindy peut-elle retrouver quelle face a obtenu Benjamin lors de son 1er jet ?

1) le gagnant est Benjamin car il a +50 et Karim +2

2) le score du 1er jet de Benjamin est: 5

Conclusion : la somme de plusieurs nombres relatifs s'effectue en général correctement. En particulier, le regroupement des nombres positifs d'une part, et des nombres négatifs d'autre part, se fait assez naturellement.

KARIM ET BENJAMIN

Le lendemain, Benjamin arrive à l'école avec un nouveau dé dont les 12 faces sont numérotées de 1 à 12 .

1) A la récréation du matin, Benjamin propose une partie à son camarade Karim. Ils se mettent tous les deux d'accord pour compter les points comme l'indique le tableau :

numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
points gagnés		50		100		150		200		250		300
points perdus	25		75		125		175		225		275	

Par exemple, si le dé tombe sur la face 6, tu gagnes 150 points, si le dé tombe sur la face 9, tu perds 225 points.
Ils jettent chacun 5 fois le dé et obtiennent les résultats suivants :

Benjamin	8	11	2	9	12

Karim	9	10	7	5	12

Donne le score de chaque joueur. Qui a gagné la partie ?

2) Le soir, à la sortie de l'école, ils jouent une nouvelle partie en 5 jets. Cindy arrive en cours de partie et manque le 1er jet de Benjamin. Elle note les autres jets :

Benjamin	?	1	12	5	7

Karim	11	2	2	1	2

A la fin de la partie, Benjamin et Karim s'exclament : « nous sommes ex-aequo »

Cindy peut-elle retrouver quelle face a obtenu Benjamin lors de son 1er jet ?

L'ARGENT DE POCHE

Les 7 enfants de la famille Dépenstrop reçoivent de l'argent de poche tous les mois. Certains ne dépensent pas tout, d'autres dépensent plus qu'ils n'ont reçu grâce aux parents qu'il faudra hélas rembourser plus tard. A la fin de chaque mois, on doit faire les comptes.

Voici le tableau récapitulatif des mois de Mai et de Juin.

	Etat du compte à la fin Mai	Etat du compte à la fin Juin	Variation pendant le mois de Juin
Annabelle	48	12	– 36
Boris	11,4	23,7	12,3
Diane	– 23,7	– 11,4	12,3
Emile	–12	–48	–36
Fabien	–28,50	37,10	65,6
Geneviève	23,7	11,4	–12,3
Hélène	12	–48	–60

1. Diane a remarqué que l'on effectue toujours la même opération pour trouver le résultat de la 3ème colonne.
   Quelle est cette opération ?

2. Pour chacun des 7 enfants, écris l'opération qu'il faut effectuer.

Quatrième activité : L'argent de poche

Objectif : préparation à la soustraction d'un nombre négatif.

Descriptif : le but initial de cette activité était de faire apparaître la soustraction d'un négatif. Malgré de nombreux essais, nous n'avons pas réussi à mettre au point une fiche qui conduise suffisamment d'élèves à proposer cette soustraction. C'est pourquoi nous opérons en deux temps : d'abord l'activité « L'argent de poche » propose une familiarisation avec une situation où elle pourrait être utilisée, puis, dans un second temps, sur la même situation, un scénario, l'activité « Vérifions les comptes », force cette écriture. L'observation ne porte que sur seize groupes provenant de quatre classes.

Déroulement : après un corrigé rapide de l'activité « Karim et Benjamin » à partir des travaux d'élèves, et au bout de quelques minutes de réflexion sur la fiche « L'argent de poche » il est nécessaire d'apporter une explication aux titres des colonnes à partir de l'exemple d'Annabelle.

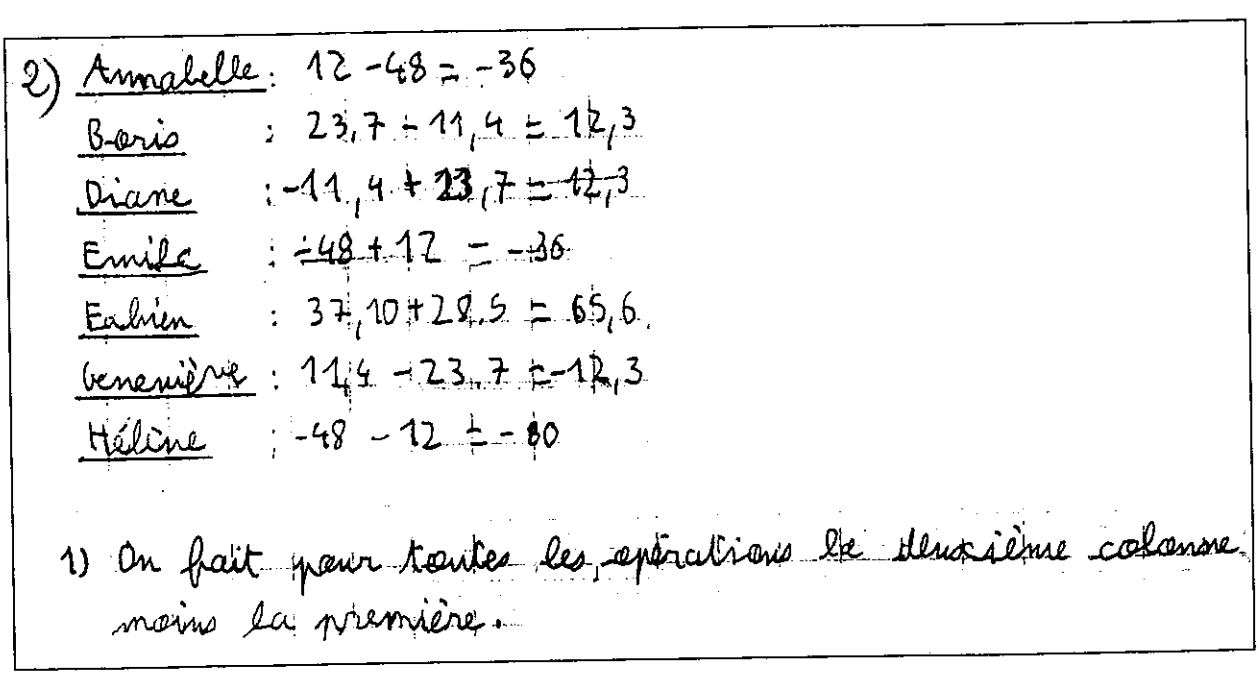
Résultats : douze groupes ont répondu correctement à la première question, sans préciser obligatoirement les termes de la soustraction ; trois groupes ne répondent pas et un groupe répond qu'il y a des additions et des soustractions.

A la deuxième question, deux groupes sont réticents à écrire 12 – 48 à la première ligne. Les difficultés apparaissent surtout à partir de la troisième ligne. On constate beaucoup d'écritures fausses associées à des résultats exacts.

Un seul groupe écrit et effectue la bonne opération : –11,4 – (–23,7) = 12,3
Cinq groupes effectuent la soustraction habituelle : 23,7 – 11,4 = 12,3
Voici le genre d'écritures fausses constatées :

–11,4 + –23,7 = 12,3 –23,7 – 11,4 = 12,3 12,3 + –11,4 = –23,7

Exemples de travaux d'élèves :


2) Annabelle : 12 - 48 = -36
Boris : 23,7 - 11,4 = 12,3
Diane : -11,4 + 23,7 = 12,3
Emilie : -48 + 12 = -36
Fabien : 37,10 + 28,5 = 65,6
Geneviève : 11,4 - 23,7 = -12,3
Héline : -48 - 12 = -80

1) On fait pour toutes les opérations la deuxième colonne moins la première.

4) Pour trouver le résultat de chaque calcul il faut soustraire.
Etat du compte à la fin juin - Etat du compte à la fin mai = Variation pendant le mois de juin

2)
Annabelle : 12 - 48 = - 36
Boris : 23,7 - 11,4 = 42,3
Diane : - 25,7 - 11,4 = 19,3
Emile : 48 - 12 = - 36
Fabien : - 28,50 - 37,40 = 65,6
Geniène : 11,4 - 23,7 = - 12,3
Hélène : 12 - 48 = - 60

Pour ces 2 personne il faut additionner

Conclusion : la soustraction de nombres négatifs ne correspond pas à une opération concrète. C'est la raison pour laquelle les élèves la contournent tranquillement en employant des procédures intuitives : le « moins-moins » n'a vraiment rien de naturel !

III - REGROUPEMENT DE LA CLASSE

Cinquième activité : Vérifions les comptes

Objectifs : • soustraction d'un nombre négatif ;
• intégration des bons élèves.

Descriptif : cette activité permet de faire le bilan de l'activité précédente et d'imposer la soustraction des nombres négatifs grâce à la quatrième ligne. L'ordre des enfants correspond à une progression de la difficulté à écrire les bonnes opérations. Les quatre premières lignes mettent en évidence la soustraction à écrire, et la ligne de Toto permet la généralisation par le professeur. Les trois dernières lignes conduisent à écrire la soustraction d'un nombre négatif.

Déroulement : cette fiche est très guidée par le professeur. Les bons élèves, sentant leur retard, sont très attentifs et rentrent vite dans la danse.

Les questions 1) et 2) ne posent pas de problèmes particuliers : les quelques mauvaises réponses sont rapidement éliminées. La troisième question est mieux acceptée par les bons élèves. La quatrième question conduit à la rédaction de la règle par quelques élèves et à son adoption par l'ensemble de la classe.

Résultats : la réponse à la deuxième question est souvent incomplète : « une soustraction », alors qu'on attend : « Etat du compte fin Juin - Etat du compte fin Mai ». La comparaison avec les résultats de l'activité « L'argent de poche » (rappelés sur un transparent par exemple) permet de découvrir que 37 – (–28) est équivalent à 37 + 28. Les élèves rédigent alors une règle pour la soustraction d'un nombre négatif et un énoncé final est adopté par l'ensemble de la classe.

Exemple de travail d'un élève en difficulté :

1) Diane affirme qu'on effectue toujours la même opération pour trouver le résultat de la 3ème colonne. Ecris cette opération pour les 4 premières lignes du tableau.

2) Quelle est cette opération qui permet d'obtenir le résultat de la 3ème colonne ?
la soustraction ; colone Juin – Colone Mai

3) Ecris maintenant cette opération pour les 3 dernières lignes du tableau.

4) Observe les 3 dernières opérations écrites et rédige une règle pour les effectuer.
il faut que les nombres négatif de la colone a devienne des nombres positif.
Ex: 37.10 -(-28.50) ;-> 37.10 + 28.50

Exemple de travail d'un bon élève :

Les 7 enfants de la famille Dépenstrop reçoivent de l'argent de poche tous les mois. Certains ne dépensent pas tout, d'autres dépensent plus qu'ils n'ont reçu grâce aux parents qu'il faudra hélas rembourser plus tard. A la fin de chaque mois, on doit faire les comptes.

Voici le tableau récapitulatif des mois de Mai et de Juin.

	Etat du compte à la fin Mai	Etat du compte à la fin Juin	Variation pendant le mois de Juin
Boris	11,4	23,7	$23,7 - 11,4 = 12,3$
Annabelle	48	12	$12 - 48 = -36$
Geneviève	23,7	11,4	$11,4 - 23,7 = -12,3$
Hélène	12	-48	$-48 - 12 = -60$
Toto	*a*	*b*	$b - a$
Fabien	-28,50	37,10	$37,10 - (-28,50)$ $37,10 + 28,50 = 65.6$
Diane	-23,7	-11,4	$-11,4 - (-23,7)$ $-11,4 + 23,7 = 12,3$
Emile	-12	-48	$-48 - (-12)$ $-48 + 12 = -36$

1) Diane affirme qu'on effectue toujours la même opération pour trouver le résultat de la 3ème colonne. Ecris cette opération pour les 4 premières lignes du tableau.

2) Quelle est cette opération qui permet d'obtenir le résultat de la 3ème colonne ?

b - a ..... (- a) + b ..... a + b .....

Etat du compte fin juin - Etat du compte fin mai .....

3) Ecris maintenant cette opération pour les 3 dernières lignes du tableau.

4) Observe les 3 dernières opérations écrites et rédige une règle pour les effectuer.

"si le 2e nombre est négatif on le transpose à la forme affirmative

" je vais ôter le signe de soustraction et celui qui est devant et je vais le transformer en signe additionnaire "

" au lieu de mettre - - , on peut le remplacé par + "

Conclusion : la règle du « moins-moins égale plus » n'est pas évidente, mais le déroulement de cette séance en permet une bonne acceptation par l'ensemble de la classe.

VERIFIONS LES COMPTES

Les 7 enfants de la famille Dépenstrop reçoivent de l'argent de poche tous les mois.
Certains ne dépensent pas tout, d'autres dépensent plus qu'ils n'ont reçu grâce aux parents qu'il faudra hélas rembourser plus tard. A la fin de chaque mois, on doit faire les comptes.
Voici le tableau récapitulatif des mois de Mai et de Juin.

	Etat du compte à la fin Mai	Etat du compte à la fin Juin	Variation pendant le mois de Juin
Boris	11,4	23,7	= 12,3
Annabelle	48	12	= – 36
Geneviève	23,7	11,4	= –12,3
Hélène	12	– 48	= – 60
Toto	*a*	*b*	
Fabien	– 28,50	37,10	= 65,6
Diane	– 23,7	– 11,4	= 12,3
Emile	– 12	– 48	= – 36

1) Diane affirme qu'on effectue toujours la même opération pour trouver le résultat de la 3ème colonne. Ecris cette opération pour les 4 premières lignes du tableau.

2) Quelle est cette opération qui permet d'obtenir le résultat de la 3ème colonne ?
.....

3) Ecris maintenant cette opération pour les 3 dernières lignes du tableau.

4) Observe les 3 dernières opérations écrites et rédige une règle pour la soustraction d'un nombre négatif.

DES CALCULS A LA PELLE

1) **Calcule :**

$a = 10 - 15$; $b = -9 + 6$; $c = -12 + 18$; $d = -3 - 7$; $e = 17 - 10$;

$f = 27 + 13$; $g = 3 + (-15 + 8)$; $h = -19 + (-32 + 43)$; $i = (7 - 12) + 13$;

$j = 37 - (68 - 71)$; $k = (-11 + 23) - (4 - 7)$; $m = -9 - (-12 + 17)$;

$n = 33 - 17 - 14 + 5 - 33 + 14 - 9$; $p = 15 - (-6) + (-12) - 5$;

$q = -11 + 18 - 5 - 13 + 17$; $r = 32 - (-21) + (-53) + (-32) + 21$

2) **Ecris toutes les règles que tu utilises pour effectuer ces calculs.**

Sixième activité : Des calculs à la pelle

Objectif : énoncé des règles d'addition et de soustraction des relatifs.

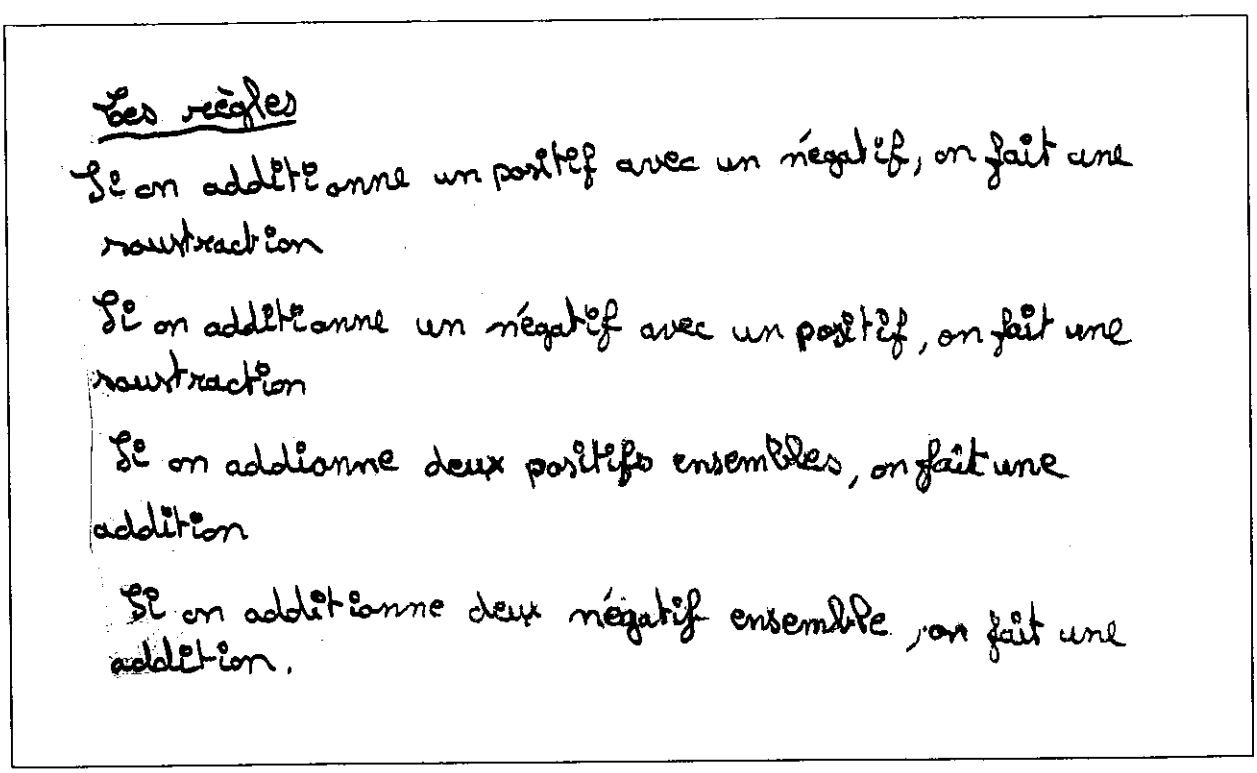
Descriptif : progression des difficultés à partir de calculs variés abordant les différents aspects de la somme algébrique.

Déroulement : les opérations a), b), c), e) et f) se font facilement. Des élèves en difficulté ont demandé à travailler avec la réglette à coulisse, et d'autres parmi les bons ont souhaité faire de même pour effectuer les calculs. Le résultat du d) se justifie bien avec le déplacement de la réglette. Le g), le h) et le i) obligent à un rappel sur la priorité des opérations. Il est important de faire rédiger les règles par les élèves, puis de sélectionner les meilleures productions pour aboutir à l'énoncé final. Il est normal que dans une formule il puisse y avoir des parenthèses en trop ; cela ne présente aucun inconvénient, ni pour la lecture par les élèves d'expressions algébriques, ni pour la maîtrise de l'écriture : par exemple $(3 + 1) - 12$ pour $3 + 1 - 12$.

A noter qu'on peut préférer intégrer la correction de cette activité au cours lui-même.

Résultat : la règle concernant la somme de nombres de même signe ne pose pas de problème. Pour la somme de deux nombres de signes contraires, la formulation de la règle est plus délicate mais la signification est correcte. Quant à la règle de soustraction d'un nombre négatif, elle est issue de l'activité « Vérifions les comptes ».

Exemples de travaux d'élèves :


Les règles

Si on additionne un positif avec un négatif, on fait une soustraction

Si on additionne un négatif avec un positif, on fait une soustraction

Si on additionne deux positifs ensembles, on fait une addition

Si on additionne deux négatif ensemble, on fait une addition.

Les deux nombres relatifs ont des signe différents
- je prends les signe de la plus grande valeur
- je calcul la difference des valeurs

Quand il ya 2 nombre negatif le resultat est negatif.

Quand il ya 2 nombre positif le resultat est positif

Lorsque il y a un calcul entre parenthese on le calcul en premier.

exc : $3 + (-15+8)$

$= 3 + (-7) = 3 - 7.$

$= -4$

Conclusion : la méthode qui consiste à définir les règles concernant l'addition et la soustraction des nombres relatifs à partir des productions d'élèves nous paraît plus motivante et plus performante, d'autant plus qu'il s'agit ici de les substituer à des rédactions qui sont habituellement d'une complexité bien décourageante. On constate que les élèves préfèrent énoncer plusieurs petites règles plutôt qu'une règle synthétique.

IV - OPPORTUNITE DE CETTE APPROCHE DES RELATIFS

1 - Les raisons de nos choix

Les avantages de la règle à coulisse : la représentation des nombres relatifs sur la droite des réels n'est pas un acquis quand il s'agit d'une situation de gains et pertes. Plutôt que l'imposer aux élèves, il nous semble préférable de les aider à se construire ce type de représentation. Dans cet esprit, nous avons cherché à fournir aux élèves un outil leur laissant le maximum de liberté. Cependant nous avons placé le zéro au milieu de la graduation car l'expérience nous a montré que les élèves le placent plus naturellement à l'une des extrémités, ce qui les conduit à des manipulations impossibles. De plus, pour éviter des graduations inadaptées, soit trop larges empêchant de réaliser les opérations de nos exercices, soit trop étroites posant des problèmes de lecture, soit irrégulières, nous avons imposé une graduation. Mais nous laissons aux élèves la liberté de choisir les nombres qu'ils vont disposer sur cette graduation.

Nous avons construit notre séquence pour qu'interviennent naturellement et simultanément deux langages différents : celui de la réglette et le langage algébrique. Chacun de ces langages a en effet ses avantages :

- la réglette permet une représentation aisée d'un gain ou d'une perte et le traitement de l'addition de deux nombres relatifs ; en revanche elle est mal adaptée à la soustraction des relatifs.

- le langage algébrique est efficace pour représenter une situation complexe. Il est au départ inconnu des élèves donc inapproprié pour effectuer des opérations.

C'est l'articulation entre ces deux langages qui va permettre, peu à peu, à l'élève de créer dans le langage algébrique des méthodes de traitement adaptées. Le langage algébrique devient alors pour l'élève un outil performant, la réglette n'étant plus qu'un moyen de contrôle utile dans les cas difficiles.

La présentation des données : pour éviter de privilégier une notation ou une présentation des opérations, nous avons choisi de présenter dans les premières fiches les données dans des tableaux peu adaptés au traitement et avec un code de couleur pour désigner les points gagnants et les points perdants. Ce n'est qu'avec l'activité « Des calculs à la pelle », que l'on retrouve les notations habituelles dans l'énoncé.

Les tâches d'écriture : le but de ces tâches n'est pas d'obtenir des textes parfaits, mais d'obliger les élèves à expliciter certaines démarches plus ou moins implicites. Cela rend plus fructueux les débats, les textes produits pouvant servir de point de départ.

Les calculs sont parfois effectués avec un certain automatisme, et le sens des opérations est souvent déterminé par intuition. L'écriture impose une réflexion sur la démarche suivie, permettant d'éliminer des procédures fantaisistes et de conforter les bonnes options.

Les débats : on a choisi de placer les débats en début de séance. En effet, cela permet d'étudier auparavant les productions des élèves récupérées à la fin de la séance précédente, et de pouvoir les utiliser en rassemblant par exemple les plus pertinentes d'entre elles sur un transparent. De plus, s'il est facile d'écourter un débat qui traîne, il est regrettable d'interrompre un échange riche par la sonnerie de fin de cours.

L'intérêt de ces débats est de faire sélectionner par les élèves eux-mêmes les bons calculs et les bonnes écritures, et de révéler la multiplicité des formulations équivalentes. Cette variété permet de repérer les solutions les plus simples et de mieux ancrer la bonne démarche.

2 - Les résultats

Les signes : l'un des grands avantages de cette approche est d'introduire d'emblée plusieurs écritures pour les opérations sur les nombres relatifs. Ce sont en effet les élèves qui créent leur propre manière d'écrire et chacun d'eux va choisir celle qui correspond le mieux à sa façon de voir. Les uns vont naturellement proposer $+8$ ou 8^+ pendant que d'autres écriront 8. Des expressions comme $-11 + +8$, ou $+10 - +7$ vont apparaître. On constate que chacun, s'appuyant sur l'écriture qu'il a choisie, va vite comprendre les écritures des autres ; les formes erronées ou dangereuses seront le plus souvent rejetées d'un commun accord.

Ce n'est évidemment pas le cas quand l'enseignant commence par imposer une écriture avec de nombreuses parenthèses ; certains élèves peuvent être déroutés par des expressions du type $(+4) + (-5)$; et la situation ne s'arrangera pas quand l'enseignant devra introduire la notation dite « simplifiée ». Il n'est pas surprenant que, dans ces conditions, l'équivalence de $2 + (-12)$ et de $2 - 12$ soit ressentie par trop d'élèves comme une convention d'écriture. Au contraire, après cette séquence, la plupart des élèves en comprennent le bien fondé.

Ces difficultés de l'enseignement viennent de ce qu'il n'y a pas de notation canonique, c'est-à-dire s'imposant à tous comme la plus efficace. Par exemple, pour désigner un nombre positif, il est aussi légitime d'employer une notation comme 8, qui identifie le nombre relatif positif avec le nombre naturel, que la notation $+8$ qui les distingue.

Les opérations : grâce à la manipulation de la réglette à coulisse, la grande majorité des élèves en difficulté a pu passer sans heurt de la notion d'abscisse, déjà acquise, à celle d'addition des nombres relatifs. Les bons élèves, qui n'ont pas eu cet apprentissage, ont montré qu'ils accédaient facilement à l'utilisation de cette opération.

Malheureusement la soustraction de nombres négatifs, n'ayant rien de naturel, est systématiquement détournée. Cela n'empêche pas les résultats justes donnés par beaucoup d'élèves grâce à leur bon sens.

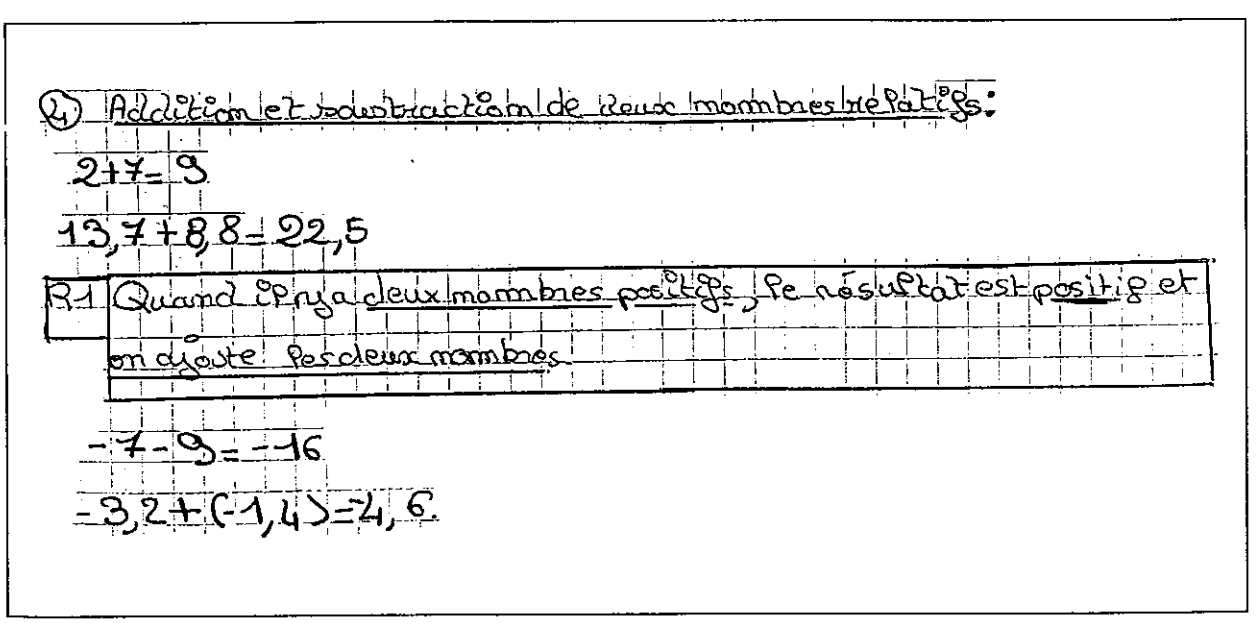
Soustraire un nombre négatif : c'est effectivement la difficulté centrale. Comme nous l'avons déjà dit, aucune situation concrète ne conduit à cette écriture car elle est remplacée immédiatement par une addition. Celle-ci ne se justifie que pour une situation où intervient une variable et où l'on veut exprimer les différents cas par une formule unique. C'est bien dans cet esprit que les activités « L'argent de poche » et « Vérifions les comptes » ont été conçues. L'expérience montre que, après les hésitations des élèves au cours de ces activités, la difficulté semble être surmontée.

3 - Le cours

Pour clarifier les règles d'opérations sur les relatifs, il est indispensable de les énoncer. Dans un cours traditionnel, les énoncés de ces règles, qui ne sont pas obtenues à partir du travail des élèves, sont souvent complexes. Dans notre démarche, il est possible de choisir, parmi les productions des élèves, des énoncés beaucoup plus elliptiques ; il ne s'agit pas en effet de tout expliquer, mais d'exprimer en quelques mots les points sur lesquels l'ensemble de la classe s'est mis d'accord à l'issue d'un débat approfondi. L'enseignant s'assure naturellement qu'aucune idée essentielle n'a été oubliée.

Les énoncés choisis finalement vont évidemment dépendre de l'enseignant. Si celui-ci a l'habitude de s'exprimer de manière très précise, il modifiera les propositions d'énoncés des élèves pour les compléter. Si au contraire, il souhaite mettre plus l'accent sur la signification que sur la précision, il pourra accepter des expressions d'élèves incomplètes mais parlantes. Il est important de bien comprendre qu'un énoncé incomplet, qui est aux yeux de certains enseignants incorrect, peut, dans la classe où il a été introduit avec les précautions indiquées, se révéler très performant, aussi bien sur la forme, car il est plus simple que l'énoncé traditionnel, que sur le fond, car il a plus de sens pour les élèves qui savent très bien ce qui est sous-entendu.

A titre d'exemple, on trouvera ci-après ce qui a été noté dans le cahier de cours d'un élève, sur la base de leur production.


Addition et soustraction de deux nombres relatifs:
2+7=9
13,7+8,8=22,5
R1 Quand il y a deux nombres positifs, le résultat est positif et on ajoute les deux nombres
-7-9=-16
-3,2+(-1,4)=4,6

R2 Quand il y a deux nombres négatifs, le résultat est négatif et on ajoute les deux nombres.

2-5=-3

2,1+(-7,2)=-3,1

12-5=7

-8+15=7

2+(-7)=-5

-9+14=5

R3 Quand il y a un nombre positif et un nombre négatif, on effectue une soustraction.
* Le résultat est positif quand c'est le nombre positif qui l'emporte.
* Le résultat est négatif quand c'est le nombre négatif qui l'emporte.

-12-12=0

-7+7=0

1,2+(-1,2)=0

R4 Quand on ajoute deux nombres opposé, le résultat est égal à 0.

12-(-7)=12+7=19

-3-(-8)=-3+8=5

-11-(-5,2)=-11+5,2=-5,8

R5 Quand on veut soustraire un nombre négatif, on ajoute le nombre positif opposé.

5) Sommes algébriques:

Une somme algébrique est une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs.

a) Somme de plusieurs nombres relatifs:

A = (7,2) (-9) (+8) (+6,3) (-14,5) (8) (-1,8)

Ce sont des nombres opposés.
Leur somme est 0.

= 13,5 - 25,3

= -11,8

RETENIR :

Pour calculer la somme de plusieurs nombres relatifs on peut :

* Annuler les nombres opposés s'il y en a.
* Regrouper et additionner les nombres relatifs du même signe (positif et négatif).

Remarque :

Un nombre relatif se déplace toujours accompagné de son signe.

$7 - 10 + 4 - 8$

$= 7 + 4 - 10 - 8$

b) Sommes algébriques :

$B = -5 \boxed{-(-8)} - 23 - 7 + 6 - 9 + 23$

$= (-5) \boxed{+8} (-23) (-7) + 6 (-9) (+23)$

$= 14 - 24$

$= -7$

RETENIR :

Pour calculer une somme algébrique

* On transforme les soustractions de nombres négatifs en additions s'il y en a.
* Puis on utilise la règle précédente.